

作者：基础部 徐莹莹

适用课程：高等数学

《思维启迪，自信锻造——二重积分案例设计》

摘要：在高等数学课程的课点中选取适合专业实践学期的课点设置出符合学生自学能力的任务，将数学问题前置，让学生带着问题参与到专业实践中去，利用实践加深对于理论的理解。从基础巩固到问题前置培养学生的创新精神。针对每一个具体工作流程中遴选数学课程的融合点，选取相应的课点设计每一个专业的案例。解决相应的数学任务需要发现问题、提出问题、分析问题、解决问题、反思总结5个步骤来完成，教师深入专业全程跟踪指导。在解决问题的时候需要收集数据，分析数据，从而正确的进行运算获取结论，这既锻炼五项通用能力中的数学应用能力，也是职业核心能力的要求。

关键词：高等数学；高等教育；专业实践；创新

一、背景介绍

高等数学是高等学校理工科各专业的一门重要的公共基础课之一。通过各教学环节逐步培养学生具有抽象思维能力、逻辑思维能力、空间想象能力和自学能力，综合运用数学知识去分析问题和解决问题的能力。本课程为学习后续课程，从事工程技术、经济管理工作，科学研究以及开拓新技术领域，打下坚实数学的基础。随着学科分类的细化，传统的高等数学教学体系及模式有些时候不能很好的适应学科发展的需要。

二、项目案例

（一）项目案例内容

项目案例来源：在当今社会，高等教育不仅仅是知识的灌输，更是能力的培养与塑造。大学生作为社会的新鲜血液，其专业素养和实

践能力的提升对于国家的发展和社会的进步具有重要意义。我任教机器人工程专业，该专业目前有学生 140 人，专业实践地点有五个，分别为歌尔股份有限公司、凡润显示科技（张家港）有限公司、日照市越疆智能科技有限公司、汽车教学中心实验室、北汽福田汽车股份有限公司山东多功能汽车厂，大一学生岗位以机器人装配为主，大二学生岗位以机器人调试为主。每个岗位都需要认识一些常用零件，某些零件是不规则的，有时需要我们知道该零件的体积，这时就需要用到高等数学中的二重积分的相关内容了。

项目案例内容：在专业实践学期中，大一学生岗位以机器人装配为主，大二学生岗位以机器人调试为主。每个岗位都需要认识一些常用零件，某些零件是不规则的，有时需要我们知道该零件的体积，假设某机器人零件是一个曲顶柱体，假设曲顶为平面 $x + y + z = 2$ ，零件由平面及三个坐标平面围成，求零件体积。



（二）关键点

知识目标：领会二重积分的概念，了解二重积分存在定理，辨别二重积分与定积分之间的联系。

能力目标：模拟曲顶柱体体积求解过程，拓展二重积分的几何意义，灵活运用二重积分的性质。

价值引领目标：引导学生学会从特殊到一般，从具体到抽象的数学方法。从实践中创设情境，渗透“化整为零、积零为整”的辩证唯物观，培养学生的创新意识和科技服务于生活的人文精神。

（三）教学使用

项目案例教学过程中如何进行组织引导，教学组织、过程设计、考核方法、教学效果等；

1. 教学组织与过程设计

（1）创设情境：

- 预习汇报问题：生活中有许多的不规则图形，该怎样求解它们的面积？



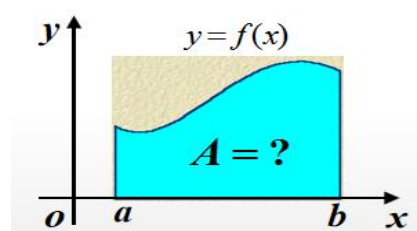
可自找一不规则图形，应用所学知识说明面积求解的过程及结果。

- 学生汇报与点评。

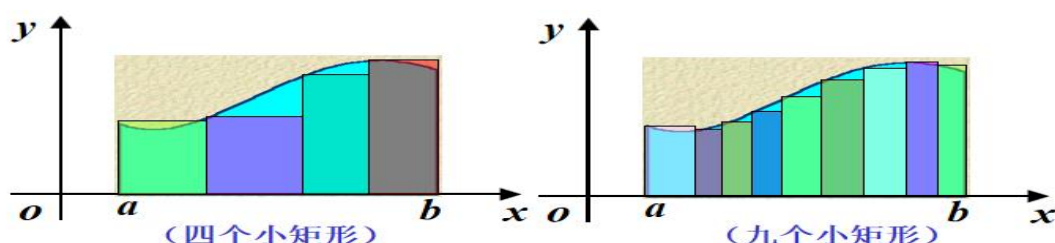


➤ 教师点评并结合学生汇报成果总结，引入新知。

曲边梯形由连续曲线 $y = f(x) (f(x) \geq 0)$ 、 x 轴与两条直线 $x=a$ 、 $x=b$ 所围成，如图所示，求曲边图形的面积。



曲边梯形面积的确定方法：把该曲边梯形沿着 y 轴方向切割成许多窄窄的长条，把每个长条近似看作一个矩形，用长乘宽求得小矩形面积，加起来就是曲边梯形面积的近似值，分割越细，误差越小，于是当所有的长条宽度趋于零时，这个阶梯形面积的极限就成为曲边梯形面积的精确值了。



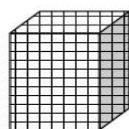
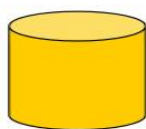
总结步骤求解的方法：

求曲边梯形面积的“四步曲”

1° 分割	↔	化整为零
2° 近似代替	↔	以直代曲
3° 求和	↔	积零为整
4° 取极限	↔	刨光磨平

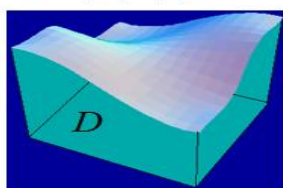
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

(2) 提出问题:



柱体体积=底面积×高
特点: 平顶

$$z = f(x, y) \geq 0$$

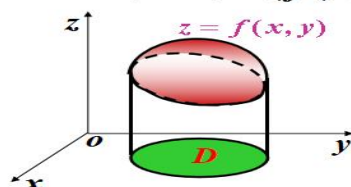


不规则物体体积=?
特点: 曲顶柱体

(3) 分析问题: 分析规则三维图形和不规则三维图形的特点, 对比规则二维图形和不规则二维图形面积的求法, 应用同样的方法, 求出不规则图形的面积。

曲顶柱体的体积

曲顶柱体 以 xOy 面上的闭区域 D 为底, 侧面以 D 的边界曲线为准线而母线平行于 z 轴的柱面, 顶是曲面 $z = f(x, y), (f(x, y) \geq 0 \text{ 且在 } D \text{ 上连续})$.



曲顶柱体体积=

(4) 解决问题:

步骤如下

1. 化整为零

将域 D 任意分为 n 个子域 $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$

(用 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个子域的面积).

柱体分为 n 个小曲顶柱体.

2. 取近似值 在每个子域内任取一点

$(\xi_i, \eta_i) \in \Delta\sigma_i, i=1, 2, 3, \dots, n$

第 i 个小曲顶柱体的体积的近似式

$$\Delta V_i \approx f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

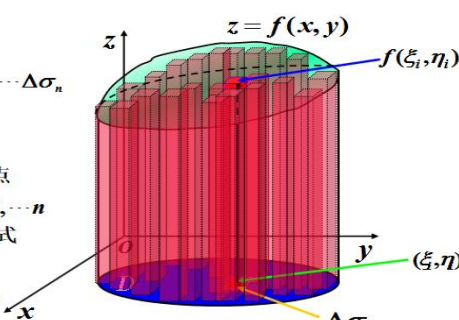
3. 求和

求 n 个小平顶柱体体积之和

$$V \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

4. 取极限 令 n 个子域的直径中的最大值(记作 λ) 趋于零,

上述和式的极限即为曲顶柱体体积



通过类比定积分，引导学生回顾“以直代曲” 在解决定积分问题中起到的关键作用，为整节课架设一个基本思维框架，让学生明确学习内容，借助熟悉的“顶面为平面的体积计算问题”，引导学生学会从特殊到一般，从具体到抽象的数学方法。

借助引例直观体会“以直代曲”和“逼近”的思想，学习归纳、类比的推理方式，体验从特殊到一般、从具体到抽象、化归与转化的数学思想。从实践中创设情境，渗透“化整为零、积零为整”的辩证唯物观，培养学生的创新意识和科技服务于生活的人文精神。

(5) 总结提升:

➤ 根据上述结论得出二重积分的概念:

二重积分的概念

定义 设 $f(x, y)$ 是有界闭区域 D 上的有界函数,

1. 将闭区域 D 任意分成 n 个小闭区域

$$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n,$$

其中 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个小区域, 也表示它的面积,

在每个 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i, η_i) ,

2. 作乘积 $f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i (i=1, 2, \dots, n)$,

3. 并作和 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$

4. 如果当各小闭区域的直径中的最大值 λ 趋近于零时,这和式 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i$ 的极限存在,则称此极限为函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上的二重积分,记为 $\iint_D f(x, y) d\sigma$, 即

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i$$

积分区域 被积函数 积分变量 被积表达式 面积元素 积分和

- 总结定积分和重积分的区别和联系:

重积分是定积分的推广和发展,其同定积分一样也是某种确定和式的极限,其基本思想是四步曲:分割、取近似、求和、取极限。

定积分的被积函数是一元函数,其积分区域是一个确定区间。二重积分的被积函数是二元函数,其积分域是一个平面有界闭区域。

- 二重积分的发展史:(拓展视野)

二重积分的发展可以追溯到 18 世纪,当时微积分学正在形成和发展。多元微积分学,作为微积分学的一个重要组成部分,是在一元微积分的基本思想的发展和应用中自然而然地形成的。偏导数的概念在微积分学创立的初期就已经出现,虽然在最初,普通的导数与偏导数并没有明显地区分开,但人们已经注意到其在物理意义上的不同。牛顿和雅各布·伯努利等数学家在他们的著作中使用了偏导数的思想。

到了 19 世纪,二重积分的概念逐渐形成。它的形成过程与定积分类似,可以通过曲顶柱体体积的例子来理解。想象一块形似曲顶柱体的物体,通过将其切割成无数个窄长方体并求和,然后取极限,可

以得到二元函数在定义区域上的二重积分的值。这种分割、求和、取极限的方法体现了数学上由简单到复杂、由特殊到一般的学习方法。此外，广义积分的概念在1823年由法国数学家柯西提出，他在无穷小分析教程概论中讨论了反常积分和积分主值的概念，这些概念为二重积分的进一步发展奠定了基础。

总的来说，二重积分的发展是微积分学发展的一部分，特别是在多元微积分和广义积分的背景下逐渐形成和完善。

2.考核方法

通过学习通下发案例考核内容，线上回收成果，通过给出的正确答案，确定得分，记入到平时成绩中。



徐莹莹

03-28 14:38

3.28





王志岩

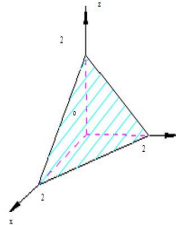
03-28 14:51

图

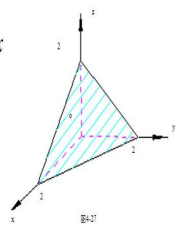
查看全部 (35 条)

机器人零件是一个曲顶柱体，假设曲顶为平面 $x+y+z=2$ ，零件由平面及三个坐标平面成，求零件体积。

此立体是以平面 $z=2-x-y$ 为曲顶，以区域D：
 $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2-x$ 为底的曲顶柱体。



所以 $V = \iint_D (2-x-y) dx dy$

$$= \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (2-x-y) dy$$
$$= \int_0^2 \left(2y - xy - \frac{1}{2}y^2 \right) \Big|_0^{2-x} dx$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^2 (2-x)^2 dx$$
$$= \frac{4}{3}$$


3.教学效果

将案例与知识讲授无缝对接，学生普遍感兴趣，获得情感上的共鸣。根据对学生调研进行词频分析，可以看到“感兴趣”是学生的主流思想动向和价值追求。



